

# Mathematische Methoden in der Schaltungssimulation

SSIM\_VO, SS2005  
P. Söser

[www.ife.tugraz.at](http://www.ife.tugraz.at) → Lehrveranstaltungen → Schaltungssimulation

## Verhaltensbeschreibung von elektronischen Schaltungen (1)

- Allg.: nichtlineare zeitabhängige Netzwerke
- Kirchhoff'sche Knotenregel (Strom)
- Kirchhoff'sche Maschenregel (Spannung)
- Bestimmungsgleichungen für das Verhalten der Zweigelemente
  - Linear (R)
  - Nichtlinear (D, BJT, MOSFET ...)
  - Integral-/Differentialgleichungen (L, C)

## Verhaltensbeschreibung von elektronischen Schaltungen (2)

- Lösung der Kirchhoff'schen Regeln über ein System von **linearen** Gleichungen
- Gleichungssystem bildet die Topologie der Schaltung ab
- Ziel
  - Ermittlung der Knotenspannungen
  - Ermittlung der Zweigströme

## Simulation = Lösung des Gleichungssystems

- Lösung dieses linearen Gleichungssystems ist das Ziel der Simulation
- Genauigkeit der Lösung hängt von einigen Parametern ab
  - Genauigkeit der Bauelementemodelle
  - Rechengenauigkeit
- Hier wird die Methode von SPICE behandelt

## Welches Verhalten der Schaltung interessiert mich?

- DC Arbeitspunkt
- Frequenzbereich
- Zeitverhalten

## DC Analyse

- Vorteilhaft unter Verwendung des Knotenpotentialverfahrens (Nodal Analysis, NA) durchführbar
  - Einfach bei einem linearen Netzwerk mit unabhängigen Stromquellen
  - C → nicht beachtet=open, L → Kurzschluss
  - Lineares Gleichungssystem  $G \cdot V = I$ 
    - G ... Leitwertmatrix
    - V ... Vektor der gesuchten Knotenspannungen
    - I ... Vektor der unabhängigen Stromquellen

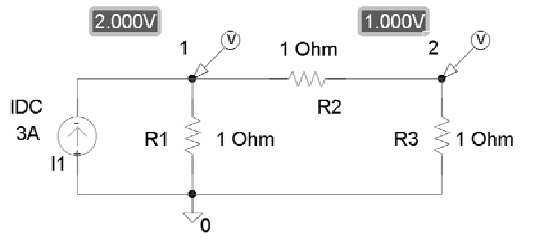
## Leitwertsmatrix

- Bezugsknoten der Schaltung (Masse) ist der Knoten **0**
- Alle anderen Knoten werden durchnummeriert (Potential auf **0** bezogen)
- Elemente der Leitwertsmatrix
  - Diagonale ( $G_{jj}$ ): Summe der Leitwerte, die am jeweiligen Knoten **j** angeschlossen sind
  - Elemente  $G_{jk}$ : negativer Leitwert zwischen Knoten **j** und **k**
- **Viele Matrixelemente sind Null!**

## Spannungs- /Stromvektor

- Spannungsvektor enthält die gesuchten Spannungen der Knoten bezogen auf den Knoten **0**
- Im Stromvektor wird ein Strom **in** den Knoten **positiv** eingetragen (**vom** Knoten  $\rightarrow$  **negativ**), Strom in/aus den/dem Knoten **0** wird nicht angeführt!

## Leitwertmatrix - Beispiel DC Analyse; lineares Netzwerk



$$\begin{pmatrix} G1+G2 & -G2 \\ -G2 & G2+G3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} IDC \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:  $V = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

## Wie kann das lineare Gleichungssystem gelöst werden?

- Bilden der inversen Leitwertmatrix ist sehr aufwändig
- Gaußsche Elimination
  - Bilden der oberen Dreiecksmatrix
  - Rückwärts einsetzen
- LU Faktorisierung (in SPICE verwendet)
  - Leitwertmatrix ist das Produkt einer unteren (L, Lower) und einer oberen (U, Upper) Dreiecksmatrix
  - Vorwärts- und anschließend rückwärts einsetzen

# Beispiel LU-Faktorisierung

Allgemein:

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21}/a_{11} & 1 & 0 \\ a_{31}/a_{11} & a_{32}/a_{22} & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{Ux} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{U}^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{b}$$

L-, U-Matrix zum vorigen Beispiel:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}; \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3/2 \end{bmatrix}; \mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/3 \\ 0 & 2/3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U}^{-1} \cdot \mathbf{L}^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}$$

# Vorteile der LU-Faktorisierung

- Wiederholtes Berechnen der Lösungen bei verschiedenen Eingangsvektoren (z.B. Sensitivitäts-, Rausch-Analyse) ist einfach
- $\mathbf{L}^{-1}$  und  $\mathbf{U}^{-1}$  können einfach gebildet werden (← Dreiecksmatrizen)

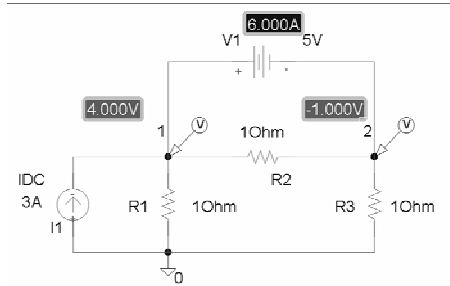
## Modifiziertes Knotenpotentialverfahren (1)

- MNA (Modified Nodal Analysis)
- Problem mit Spannungsquellen und Induktivitäten im Knotenpotentialverfahren
- Erweiterung der Leitwertmatrix um eine Zeile und eine Spalte pro Spannungsquelle
  - **+1** an der Stelle der neuen Zeile bzw. Spalte, die dem positiven Anschluss entspricht
  - **-1** für den negativen Anschluss
  - Restliche Elemente sind **0**

## Modifiziertes Knotenpotentialverfahren (2)

- Modifikation des Spannungs- bzw. Stromvektors
- $N \times N$  – Matrix entsteht
- $N = n + n_V + n_L$ 
  - $n$  ... Anzahl der Knoten
  - $n_V$  ... Anzahl der Spannungsquellen
  - $n_L$  ... Anzahl der Induktivitäten

# Beispiel MNA



$$\begin{pmatrix} G1+G2 & -G2 & 1 \\ -G2 & G2+G3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \\ IV1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} IDC \\ 0 \\ V1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{Lösung } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

# MNA – Gleichungsmuster für weitere Netzwerkelemente

Quellentyp	Gleichungsmuster
<p>Stromgesteuerte Stromquelle</p> <p><math>I_k = c + I_m</math></p>	$\begin{pmatrix} p & q & r & s & k \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ m & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ k & 0 & 0 & 0 & -c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
<p>Stromgesteuerte Spannungquelle</p> <p><math>U_k = b + I_m</math></p>	$\begin{pmatrix} p & q & r & s & k \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ r & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ m & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ k & 1 & -1 & 0 & -b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
<p>Spannungsgesteuerte Spannungquelle</p> <p><math>U_k = c + U_m</math></p>	$\begin{pmatrix} p & q & r & s & k \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ k & 1 & -1 & -c & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
<p>Ideale Spannungquelle</p>	$\begin{pmatrix} p & q & k \\ p & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
<p>Spannungsgesteuerte Stromquelle</p> <p><math>I_k = d + U_m</math></p>	$\begin{pmatrix} p & q & r & s & k \\ p & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ r & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k & 0 & 0 & -d & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
<p>Ampere-meter</p>	$\begin{pmatrix} p & q & k \\ p & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & -1 \\ k & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$
<p>Strom durch eine Admittanz</p>	$\begin{pmatrix} p & q & k \\ p & 0 & 0 & 1 \\ q & 0 & 0 & -1 \\ k & Y & -Y & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{pmatrix}$

Quelle: Diplomarbeit M. Prediger



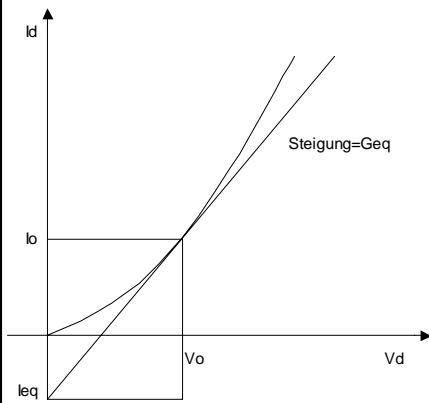
## Genauigkeitseinflüsse

- Topologisch
  - V und L generieren eine 0 in der Diagonale der MNA-Matrix
  - Umsortierung notwendig, da sonst das System nicht direkt gelöst werden kann → Pivoting
  - Parameter **PIVTOL** (default  $10^{-13}$ ) und **PIVREL** (default  $10^{-3}$ ) für SPICE
- Numerisch
  - Double precision IEEE floating point Darstellung

## Nichtlinearitäten

- Linearisierung notwendig, damit das MNA-Verfahren zur Lösung des Gleichungssystems angewendet werden kann
- Newton Algorithmus
  - Iterative Lösung
- Lösung muss **konvergieren!**

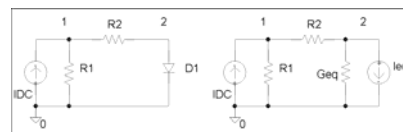
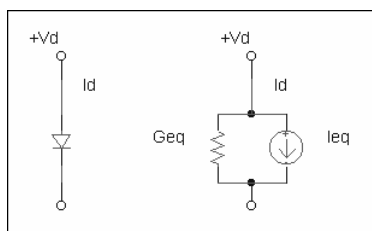
# Linearisierungsbeispiel - Diode



- In jedem Arbeitspunkt der Diode wird die Diodencharakteristik durch die Tangente in diesem Punkt angenähert
  - Entspricht einer Parallelschaltung von Leitwert und Stromquelle

$$I_o = I_{eq} + V_o \cdot G_{eq}$$

# Linearisierungsbeispiel – Diode (2)



$$\begin{pmatrix} G_1 + G_2 & -G_2 \\ -G_2 & G_2 + G_{eq} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} IDC \\ -I_{eq} \end{pmatrix}$$

Iteration Newton(-Raphson) solange, bis sich die Lösungen nur mehr um eine eingestellte Toleranz unterscheiden.

**D.h.: die Lösung muss konvergieren!**

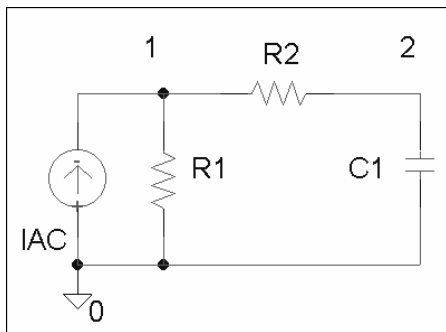
## Konvergenz und dafür relevante Optionen/Parameter in SPICE

- Modifikation des Newton Algorithmus'
  - Limitierung der Änderung
  - Setzen eines Startwertes für die Knotenspannung (.NODESET)
  - *GMIN* (default  $10^{-12}$ ) parallel zu jedem pn-Übergang
- Parameter für Abbruch der Iteration
  - *RELTOL*, *VNTOL*, *ABSTOL*, *ITL1*, *ITL2*, *ITL4*
- Source Ramping (PSPICE, SPICE3, *ITL6* bei SPICE2)

## AC Analyse

- Kleinsignal Wechselfeldanalyse
- DC Arbeitspunkt → Linearisierung
- Amplitude darf nur so groß werden, dass die Linearisierung noch korrekt ist!
- Sinusförmige Eingangsquellen; alle haben die selbe Frequenz
- Matritzelemente sind komplexe Zahlen
  - $Y_r = 1/R$  ;  $Y_c = j\omega C$  ;  $Y_l = 1/j\omega L$

## AC Analyse - Beispielmatrix



$$\begin{pmatrix} G1+G2 & -G2 \\ -G2 & G2+j\omega C1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} IACe^{-j\phi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Phi$  ... Phasenlage der Eingangsquelle

## Transienten Analyse (1)

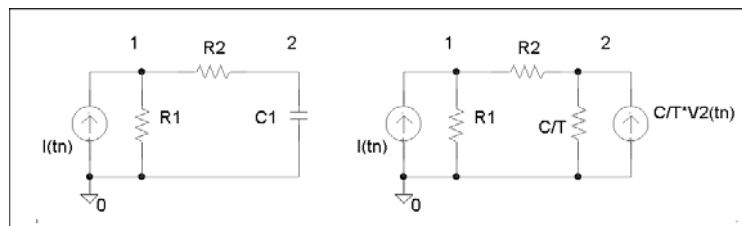
- Antwort der Schaltung in der Zeitdomäne
  - Zeitintervall 0 ... T wird betrachtet
  - Lösung zum Zeitpunkt 0 über DC Arbeitspunkt
  - Anfangszustand der Energiespeicher in der Schaltung (L und C) kann angegeben werden
  - Zeitintervall wird in Zeitschritte variabler Länge unterteilt (0, t1, t2 ...T)
  - Automatische Zeitschrittverkürzung bei großen Signaländerungen

## Transienten Analyse (2)

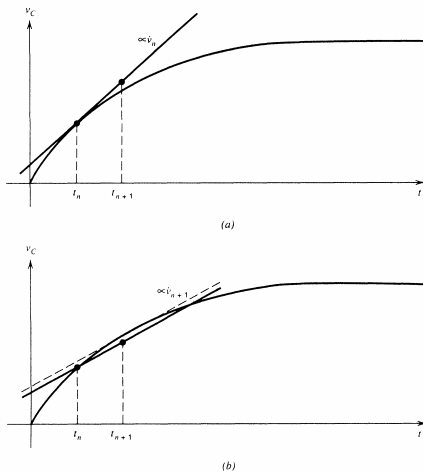
- Numerischer Integrationsalgorithmus zur Lösung der Differentialgleichungen
  - Vorwärts Euler
  - Rückwärts Euler
  - Trapez
  - Formeln nach Gear

## Rückwärts Euler Verfahren

- Kapazität C
  - $i = C \, dv/dt$
  - $dv/dt \approx (v_{n+1} - v_n) / T$  ; T ... Zeitschrittlänge
  - $i_{n+1} = C/T * v_{n+1} - C/T * v_n$
  - → mit DC-Analyse erhält man die Spannung zur Zeit  $t_{n+1}$



# Vorwärts/Rückwärts Euler Verfahren

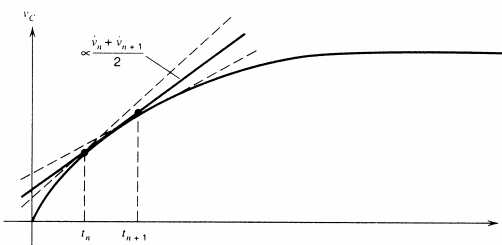


- Verfahren erster Ordnung
  - (a) ... FE (forward-Euler)
  - (b) ... BE (backward-Euler)
- LTE (local truncation error) bestimmt die automatische Zeitschrittverkürzung

$$LTE = \left| \frac{h^2}{2} \cdot x_n \right|$$

# Trapezverfahren

- Verfahren 2-ter Ordnung



$$LTE = \left| \frac{h^2}{6} \cdot x_n \right|$$

# Formeln nach Gear

Gear 1:  $x_{n+1} = x_n + h\dot{x}_{n+1} - \frac{h^2}{2} \frac{d^2x}{dt^2}(\xi)$

Gear 2:  $x_{n+1} = \frac{4}{3}x_n - \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{2h}{3}\dot{x}_{n+1} - \frac{2h^3}{9} \frac{d^3x}{dt^3}(\xi)$

Gear 3:  $x_{n+1} = \frac{18}{11}x_n - \frac{9}{11}x_{n-1} + \frac{2}{11}x_{n-2} - \frac{6h}{11}\dot{x}_{n+1} - \frac{3h^4}{22} \frac{d^4x}{dt^4}(\xi)$

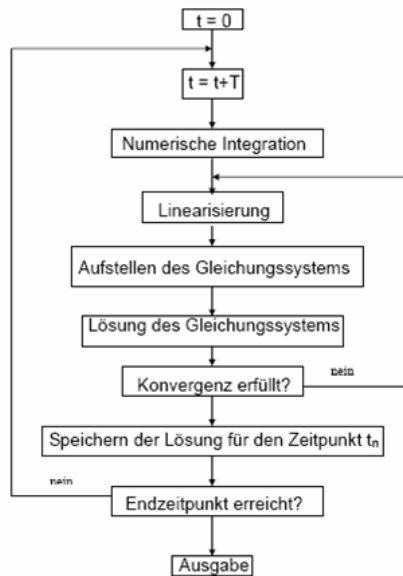
Gear 4:  $x_{n+1} = \frac{48}{25}x_n - \frac{36}{25}x_{n-1} + \frac{16}{25}x_{n-2} - \frac{3}{25}x_{n-3} + \frac{12h}{25}\dot{x}_{n+1} - \frac{3h^5}{125} \frac{d^5x}{dt^5}(\xi)$

Gear 5:  $x_{n+1} = \frac{300}{137}x_n - \frac{300}{137}x_{n-1} + \frac{200}{137}x_{n-2} - \frac{75}{137}x_{n-3} + \frac{12}{137}x_{n-4}$   
 $+ \frac{60h}{137}\dot{x}_{n+1} - \frac{10h^6}{137} \frac{d^6x}{dt^6}(\xi)$

Gear 6:  $x_{n+1} = \frac{360}{147}x_n - \frac{450}{147}x_{n-1} + \frac{400}{147}x_{n-2} - \frac{225}{147}x_{n-3} + \frac{72}{147}x_{n-4} - \frac{10}{147}x_{n-5}$   
 $+ \frac{60h}{147}\dot{x}_{n+1} - \frac{180h^6}{3087} \frac{d^7x}{dt^7}(\xi)$

Quelle: [5]

## Flussdiagramm zur Transientenanalyse



# Referenzen

- [1] Laurence W. Nagel.: SPICE2: A computer program to simulate semiconductor circuits  
Memorandum No. ERL-M520, 1973  
Electronic Research Laboratory, College of Engineering  
University of California, Berkeley
- [2] Hofer, E. E. E., Nielinger, H.: SPICE: Analyseprogramm für elektronische Schaltungen.  
Benutzerhandbuch mit Beispielen  
Springer Verlag, 1985
- [3] V.Litovski and M. Zwolinski: VLSI Circuit Simulation and Optimization  
Chapman & Hall 1997
- [4] Prediger, M.: Symbolische Verarbeitung und Analyse von Netzlisten  
Diplomarbeit am Lehrstuhl für Rechnergestützten Schaltungsentwurf,  
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg 1998
- [5] Vladimirescu A.: The SPICE book  
John Wiley & Sons, Inc.; 1994