Die mathematischen Methoden in SPICE

Zur mathematischen Analyse von Netzwerken in SPICE wird ein Netzwerk durch ein Gleichungssystem beschrieben. Allgemein handelt es sich bei elektronischen Schaltungen um nichtlineare zeitabhängige Netzwerke. Die grundlegenden Analysen sind die DC, AC und Transientenanalyse.

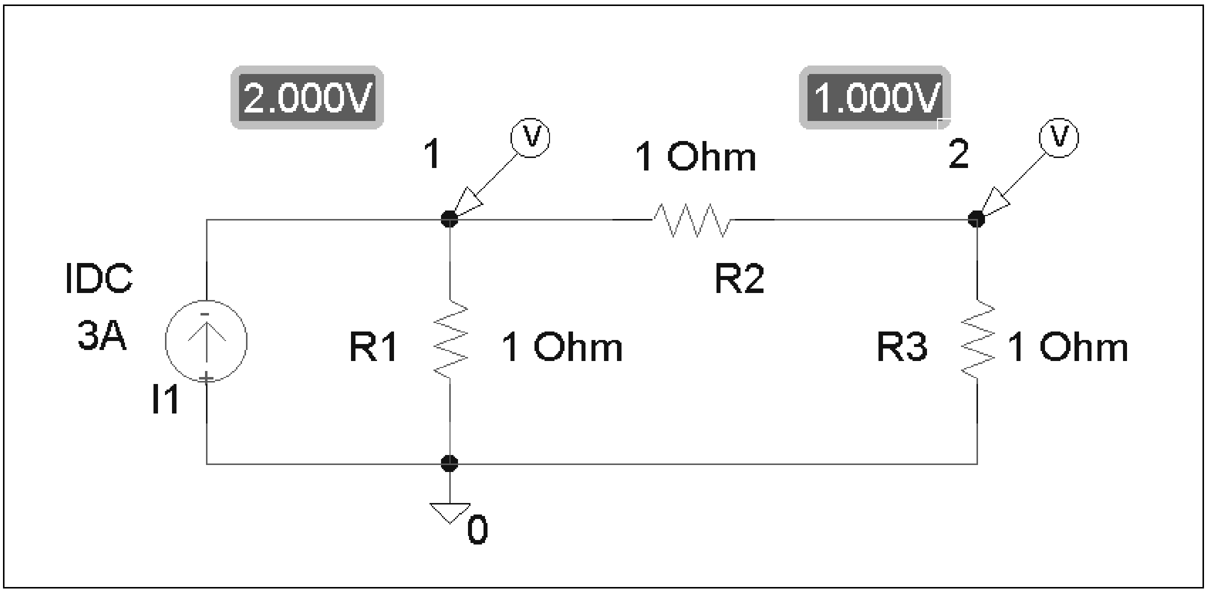
DC Analyse

Die grundsätzliche DC Analyse besteht aus dem Berechnen des Arbeitspunkts der Schaltung. Die Kapazitäten werden entfernt und Induktivitäten als Kurzschluss eingesetzt. Dies entspricht dem eingeschwungenen Verhalten der Schaltung. Als besonders geeignet für die Berechnung am Computer hat sich das Knotenpotentialverfahren bewährt. Sehr einfach geht dies bei einem linearen Netzwerk, bei dem zusätzlich nur unabhängige Stromquellen vorhanden sind. Es wird durch ein lineares Gleichungssystem in der Form **G*V=I** abgebildet, wobei **G** die Leitwertsmatrix, **V** der Vektor der zu ermittelten Knotenspannungen und **I** der Vektor der unabhängigen Stromquellen ist.

Die Leitwertsmatrix wird folgendermaßen aufgestellt:

1. Der Bezugsknoten der Schaltung (Masse) wird mit 0 bezeichnet, und alle anderen Knoten werden durchnummeriert. Die Potentiale dieser Knoten beziehen sich immer auf Knoten 0.
2. Man bestimmt dann die Elemente der Leitwertsmatrix
   Die Elemente der Hauptdiagonale $\mathbf{G_{jj}}$ errechnen sich aus der Summe der Leitwerte, die am jeweiligen Knoten i angeschlossen sind.
   Die restlichen Elemente $\mathbf{G_{jk}}$ errechnen sich aus dem negativen Leitwert zwischen den Knoten j und k.

Im Stromvektor werden die Ströme aus den Stromquellen in die Knoten mit positivem Vorzeichen eingetragen, sind sie von den Knoten weg gerichtet, mit negativem Vorzeichen.

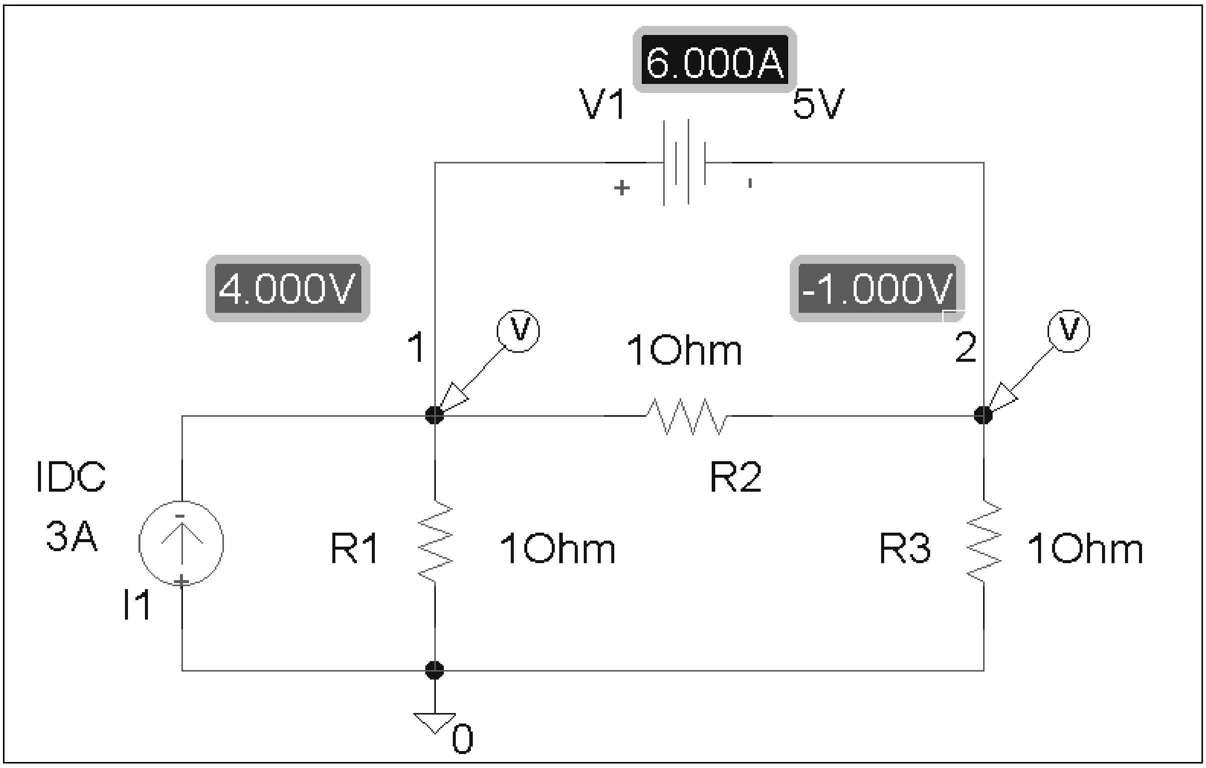


$$\begin{pmatrix} G1+G2 & -G2 \\ -G2 & G2+G3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} IDC \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \textbf{Lösung:} \quad \mathbf{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

SPICE verwendet für die Berechnung der linearen Gleichungen die Methode der LU Faktorisierung der Matrix mit anschließendem Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen. Weiters ist zu beachten, dass in elektronischen Netzwerken ein Knoten nur mit jeweils wenigen anderen über Leitwerte verbunden ist, und daher in den Matritzen sehr viele Elemente den Wert 0 haben. SPICE arbeitet mit einem Pointersystem, das nur auf die besetzten Stellen der Matritzen zeigt.

Da man in der Praxis auch Spannungsquellen sowie gesteuerte Quellen verwendet, wird das Knotenpotentialverfahren auf das modifizierte Knotenpotentialverfahren erweitert.



Zwischen Knoten 1 und 2 wird nun eine zusätzliche Spannungsquelle mit 5 Volt angeschlossen. Das Gleichungssystem wird dadurch erweitert und erzeugt eine zusätzliche Zeile und Spalte zur ursprünglichen Leitwertsmatrix **G**, die jetzt **a** genannt wird. In die beiden Matrixelemente, die dem Knoten 1 in der neuen Reihe und Spalte entsprechen (positiver Pol der Spannungsquelle) wird eine 1 eingetragen, in die Matrixelemente, die dem Knoten 2 entsprechen (negativer Pol der Spannungsquelle) wird eine –1 eingetragen. Die restlichen Elemente der neuen Zeile und Spalte werden mit Nullen aufgefüllt. Der ursprüngliche Vektor der unbekannten Knotenspannungen **V** wird um den unbekannten Strom durch die Spannungsquelle erweitert und jetzt **b** genannt, der Vektor der unabhängigen Stromquellen **I** um die unabhängige Spannungsquelle erweitert und **c** genannt.

$$\begin{pmatrix} G1+G2 & -G2 & 1 \\ -G2 & G2+G3 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \\ IVq1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} IDC \\ 0 \\ Vq1 \end{pmatrix}$$

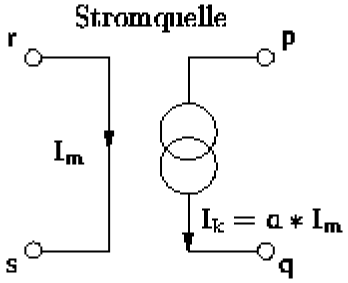
$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \qquad \textbf{Lösung } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

Im obigen Schaltbild wird nur der Betrag des Stroms angegeben und keine Richtung.

In den folgenden Tabellen sind die Gleichungsmuster zur Erweiterung des Knotenpotentialverfahrens auf das modifizierte Knotenpotentialverfahren für verschiedene Netzwerkelemente angegeben.

<table>
<tr><th>Quellentyp</th><th>Gleichungsmuster</th></tr>
<tr><td>

Stromgesteuerte Stromquelle

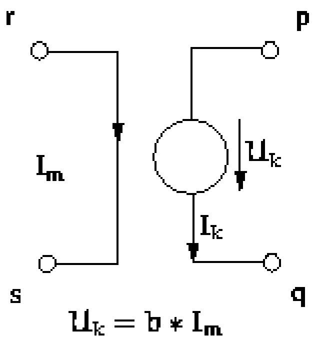


</td><td>

$$\begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \\ s \\ m \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & q & r & s & m & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -a & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ I_m \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>

Stromgesteuerte Spannungsquelle

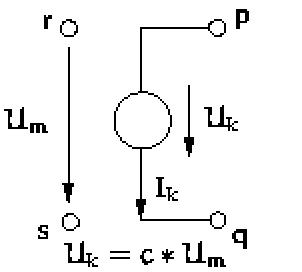


</td><td>

$$\begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \\ s \\ m \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} p & q & r & s & m & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -b & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ I_m \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>

Spannungsgesteuerte Spannungsquelle

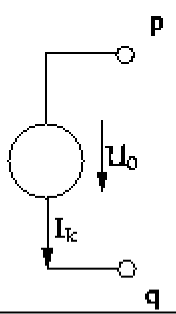


</td><td>

$$\begin{array}{c} \\ p \\ q \\ r \\ s \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} p & q & r & s & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -c & c & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

</td></tr>
<tr><td>

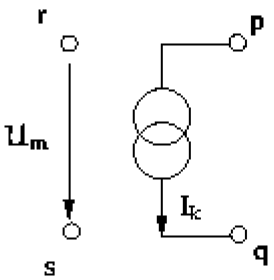
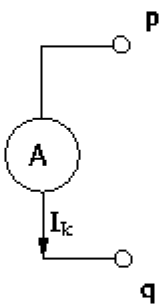
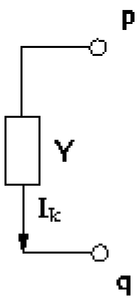
Ideale Spannungsquelle



</td><td>

$$\begin{array}{c} \\ p \\ q \\ k \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} p & q & k \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ U_0 \end{bmatrix}$$

</td></tr>
</table>

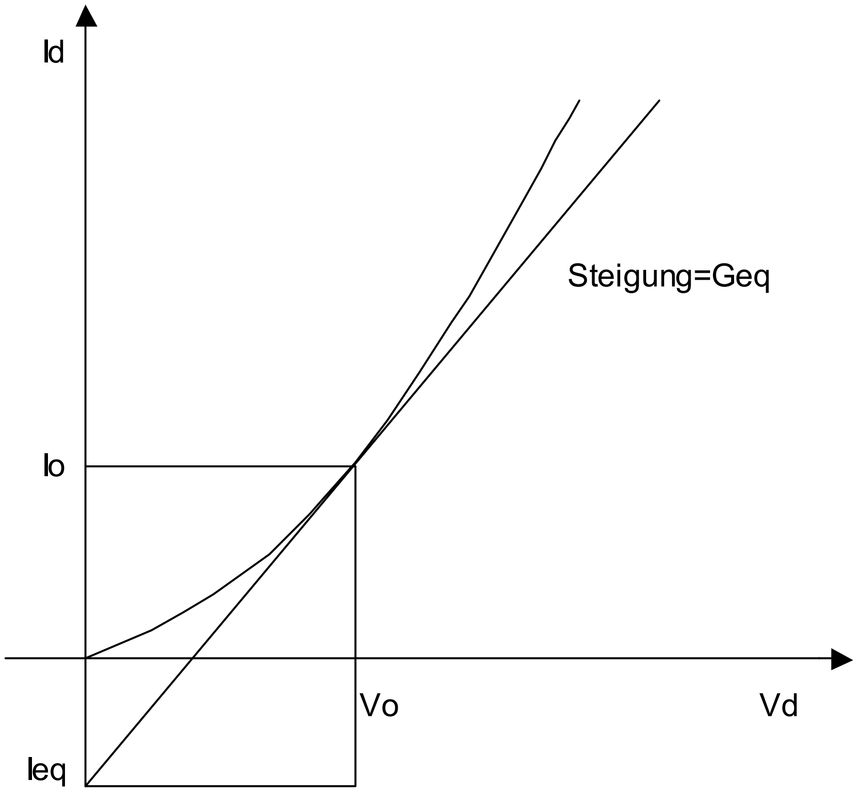
Quellentyp	Gleichungsmuster
Spannungsgesteuerte Stromquelle  $I_k = d * U_m$	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} p & q & r & s & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} p \\ q \\ r \\ s \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -d & d & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
Amperemeter 	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} p & q & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} p \\ q \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$
Strom durch eine Admittanz 	$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} p & q & k \end{matrix} \\ \begin{matrix} p \\ q \\ k \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ Y & -Y & -1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ I_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

Beim letzten Muster (Strom durch eine Admittanz), muss man diese aus der ursprünglichen Leitwertsmatrix entfernen, da sie durch die Erweiterung bereits in das Gleichungssystem eingeht. Das Muster Amperemeter ist identisch mit einer unabhängigen Spannungsquelle mit 0 Volt.

Die Tabellen wurden aus [4] übernommen.

Die Behandlung von Nichtlinearitäten

Damit die vorher besprochenen Lösungswege auch auf ein nichtlineares Netzwerk angewendet werden können, muss dieses linearisiert werden. Es wird dabei das Newton'sche Näherungsverfahren angewandt und die Lösung erfolgt iterativ.
An Hand eines Beispiels wird dies an einer Schaltung mit einer Diode erläutert.
An jedem Arbeitspunkt der Diode Vo wird die Diodencharakteristik durch eine Tangente in diesem Punkt angenähert. Diese Näherung kann als Parallelschaltung eines Leitwerts und einer unabhängigen Stromquelle interpretiert werden.



$Geq = \frac{Io - Ieq}{Vo}$ daraus folgt Io = Ieq + Vo*Geq

$Geq = \frac{Io - Ieq}{Vo}$	daraus folgt Io =	Ieq	+	Vo*Geq
		Stomquelle		Strom durch Parallelleitwert

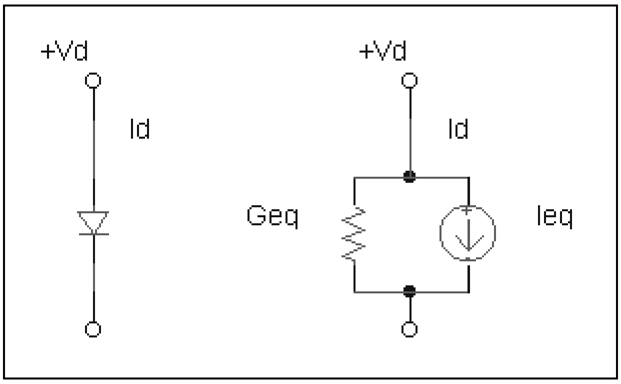
Die ideale Diode wird durch die Gleichung $Id = \mathrm{Is}\left(e^{\frac{Vd}{Vt}} - 1\right)$

beschrieben, wobei Is der Sperrstrom der Diode und Vt die Temperaturspannung ist.
Differenziert man diese Gleichung nach Vd, so ergibt sich der äquivalente Leitwert zu

$$Geq = \frac{Is}{Vt} e^{\frac{Vd}{Vt}}$$

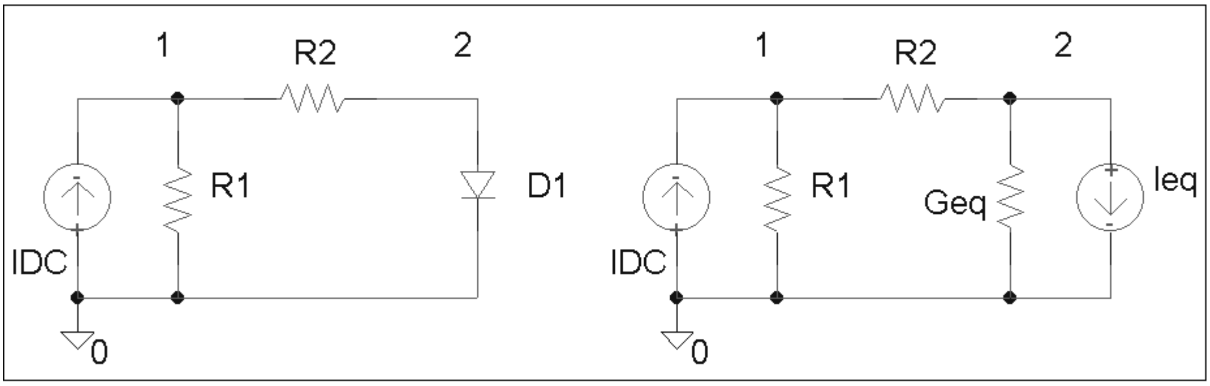
und der äquivalente Strom der unabhängigen Stromquelle zu

$$Ieq = Id - Geq * Vd$$



Ersatzschaltbild der linearisierten Diode.

Die iterative Lösung beginnt mit einem Startwert, der bei SPICE der Punkt der stärksten Krümmung der Diodenkennlinie ist. Die Gleichungen für die Schaltung werden gleich wie bei einem linearen Netzwerk aufgestellt. Mit der Lösung für die Spannung an der Diode werden dann Geq und Ieq neu berechnet und als Wert für die nächste Iteration eingesetzt. Dieser Vorgang wird so lange fortgesetzt, bis sich die Werte sukzessiver Iterationen nur mehr um eine eingestellte Toleranz unterscheiden.



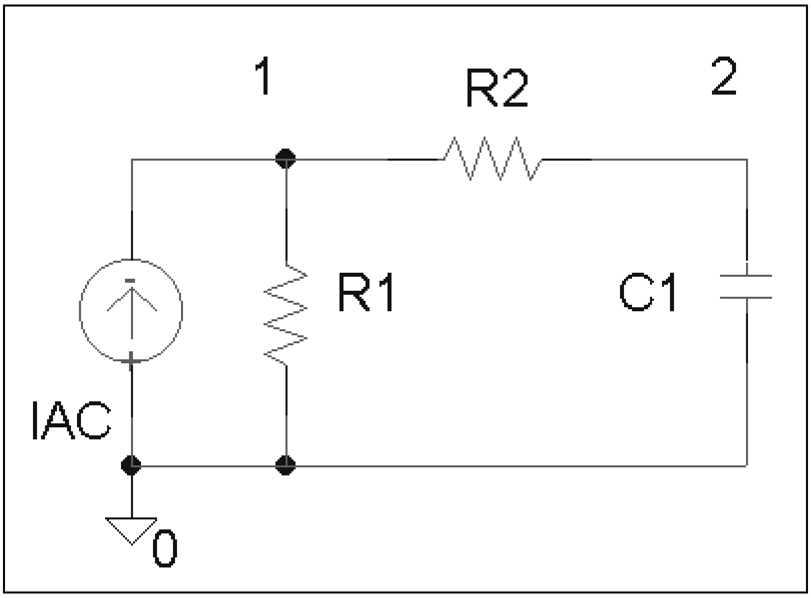
$$\begin{pmatrix} G1+G2 & -G2 \\ -G2 & G2+Geq \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} IDC \\ -Ieq \end{pmatrix}$$

AC Analyse

Die AC Analyse dient der Kleinsignal Wechselstromanalyse. Sie kann nur auf lineare Netzwerke angewandt werden, das heißt, dass sämtliche nichtlinearen Elemente zuerst wie vorher besprochen linearisiert und der DC Arbeitspunkt bestimmt werden muss. Außerdem können damit nur sinusförmige Eingangsquellen, die alle dieselbe Frequenz aufweisen müssen, als Stimuli verwendet werden. Die Gefahr bei dieser Analyse besteht darin, dass man ihr für zu große Amplituden vertraut, bei denen sich der Arbeitspunkt schon verändert. Beim Aufstellen des Gleichungssystems geht man gleich wie bei der DC Analyse vor, mit dem Unterschied, dass die Matritzenelemente jetzt komplexe Zahlen sind.

Die Leitwerte werden für Widerstand, Kapazität und Induktivität folgendermaßen eingesetzt:

$Yr = 1/R \quad Yc=j\omega C \quad Yl= 1/j\omega L$



$$\begin{pmatrix} G1+G2 & -G2 \\ -G2 & G2+j\omega C1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} V1 \\ V2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} IACe^{-j\phi} \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei $\emptyset$ die Phasenlage der Eingangsquelle bedeutet.

Transienten Analyse

Die Transientenanalyse bestimmt die Antwort der Schaltung in der Zeitdomäne über ein vorgegebenes Zeitintervall. (0...T). Für den Zeitpunkt 0 wird die erste Lösung üblicherweise durch eine DC Arbeitpunkt Analyse bestimmt. Der Benutzer kann jedoch einen Ausgangszustand für die Energiespeicher im System (Kapazitäten und Induktivitäten) vorgeben. Die transiente Lösung wird durch ein Aufteilen des Zeitintervalls (0...T) in diskrete Zeitpunkte (0,t1,t2...T) bestimmt. SPICE arbeitet hier mit einem variablen Zeitschritt; wenn schnelle Änderungen auftreten, wird der Zeitschritt verkürzt. An jedem Zeitpunkt wird ein numerischer Integrationsalgorithmus gestartet, der die Differentialgleichungen eines jeden Energiespeicherelements in äquivalente algebraische Gleichungen umformt. Das einfachste Verfahren ist das Rückwärts Euler Verfahren, das an Hand des Beispiels einer Kapazität erläutert wird.

Der Zusammenhang von Strom und Spannung bei einer Kapazität wird durch

$i = C\, dv/dt$ beschrieben.

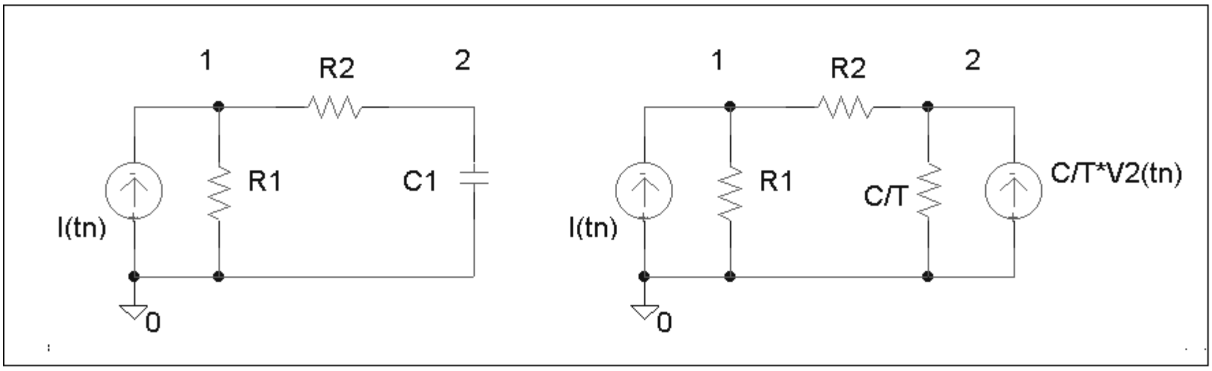
Ersetzt man den Differentialquotient durch den Differenzenquotient, so ergibt sich

$dv/dt \approx (v_{n+1} - v_n) / T$ wobei T die Länge des Zeitschritts bedeutet.

Daher ergibt sich für den Strom i_{n+1} zum Zeitpunkt t_{n+1}

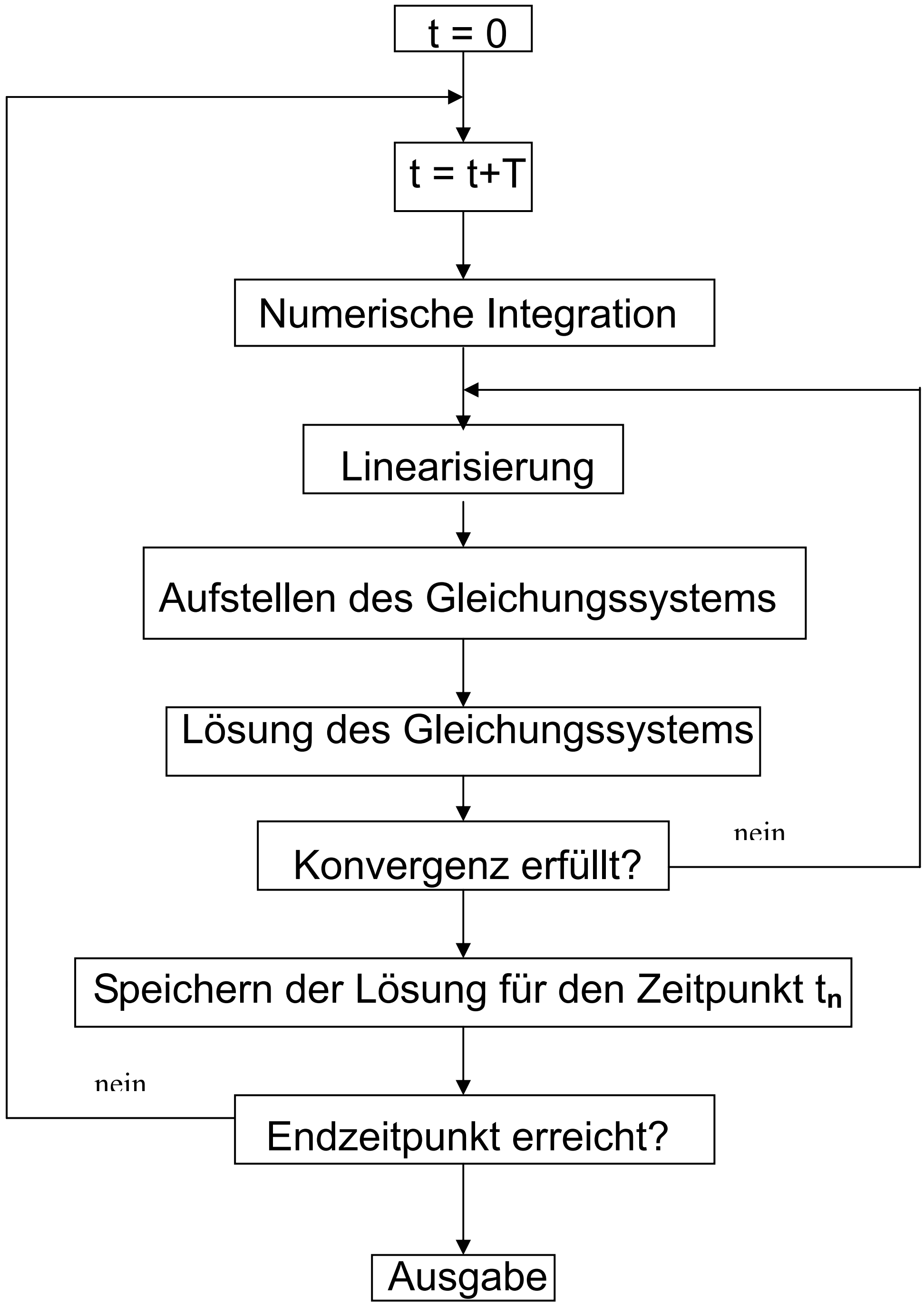
$i_{n+1} = C/T * v_{n+1} - C/T * v_n$

Diese Gleichung kann wieder als Ersatzschaltung für die Kapazität interpretiert werden. Eingesetzt in das zu untersuchende Netzwerk liefert sie mit einer DC Analyse die Spannung am Kondensator zur Zeit t_{n+1}.



Das Rückwärts Euler Verfahren liefert einen Fehler, der linear vom Zeitschritt T abhängt. In SPICE wird die Trapezintegration verwendet, bei der der Fehler quadratisch mit kleiner werdendem Zeitschritt zurückgeht.

Flussdiagramm zur Transientenanalyse



Literaturverzeichnis

[1] Laurence W. Nagel.:
SPICE2: A computer program to simulate semiconductor circuits
Memorandum No. ERL-M520, 1973
Electronic Research Laboratory, College of Engineering
University of California, Berkeley

[2] Hoefer, E. E. E., Nielinger, H.:
SPICE:. Analyseprogramm für elektronische Schaltungen.
Benutzerhandbuch mit Beispielen
Springer Verlag, 1985

[3] V.Litovski and M. Zwolinski:
VLSI Circuit Simulation and Optimization
Chapman & Hall 1997

[4] Prediger, M.:
Symbolische Verarbeitung und Analyse von Netzlisten
Diplomarbeit am Lehrstuhl für Rechnergestützten Schaltungsentwurf,
Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg 1998